ΤΡΙΤΗ 6 ΑΠΡΙΛΙΟΥ 2021 - ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΟΛΟΓΙΑ

Εκτιμητές Μέγιστης Πιθανοφάνειας (ΕΜΠ/Fisher)

τ.δ. $X_1, X_2, \dots, X_n$ από $f(x,\vartheta)$, $\vartheta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^r$

Έστω $x_1, x_2, \dots, x_n$ η παρατηρηθείσα τιμή του τ.δ.

$$f(\underline{x},\vartheta) = f(x_1,\dots,x_n,\vartheta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i,\vartheta)$$

από κοινού σππ

από κοινού πυκνότητα

περίπου ίση με την πιθανότητα

$$\simeq P_\vartheta(x_1-\varepsilon_1 \le X_1 \le x_1+\varepsilon_1, \dots, x_n-\varepsilon_n \le X_n \le x_n+\varepsilon_n)$$

ΟΡΙΣΜΟΣ: (Συνάρτηση Πιθανοφάνειας)

Έστω τ.δ. $X_1, \dots, X_n$ από κατανομή $f(x,\vartheta)$, $\vartheta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^r$. Έστω $x_1, \dots, x_n$ η παρατηρηθείσα τιμή του τ.δ. Η συνάρτηση πιθανοφάνειας ή πιθανοφάνεια του $x_1, \dots, x_n$ ορίζεται:

$$L(\vartheta) = L(\vartheta|\underline{x}) \overset{\text{ορ}}{=} f(x_1,\dots,x_n,\vartheta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i,\vartheta), \ \vartheta \in \Theta$$

ΟΡΙΣΜΟΣ ΕΜΠ Έστω $L(\vartheta) = L(\vartheta|\underline{x})$ η πιθανοφάνεια του τ.δ. $X_1, \dots, X_n$. Ο ΕΜΠ της ϑ συμβολίζεται με: $\hat{\vartheta}$ ή $\hat{\vartheta} = \hat{\vartheta}(X_1, \dots, X_n)$ και ορίζεται:

$$L(\hat{\vartheta}) = \max_{\vartheta \in \Theta} L(\vartheta) \quad \text{ή} \quad \hat{\vartheta} = \arg\max_{\vartheta \in \Theta} L(\vartheta)$$

Παρατήρηση:

(1) Το πρόβλημα εύρεσης ΕΜΠ είναι πρόβλημα μεγιστοποίησης της $L(\vartheta)$

$\frac{d}{d\vartheta} L(\vartheta) = 0$ (εξίσωση πιθανοφάνειας) και έστω $\hat{\vartheta}$ η λύση.

Το $\hat{\vartheta}$ είναι πιθανό σημείο μέγιστο

Αν $\left.\frac{d^2}{d\vartheta^2} L(\vartheta)\right|_{\vartheta=\hat{\vartheta}} < 0 \Rightarrow \hat{\vartheta}$ σημείο μέγιστο, άρα $\hat{\vartheta}$ ΕΜΠ.

(2) Αντί να μεγιστοποιούμε την πιθανοφάνεια $L(\vartheta)$, μεγιστοποιούμε τον λογάριθμο της $\log L(\vartheta)$

Παράδειγμα 1 (Κανονική Κατανομή)

Έστω τ.δ. $X_1, \dots, X_n$ από $N(\mu, \sigma^2)$. Να βρεθούν οι ΕΜΠ των μ, σ^2 στις εξής περιπτώσεις:

↳ (i) σ^2 γνωστό, $\mu=\vartheta$ άγνωστο
(ii) μ γνωστό, $\sigma^2=\vartheta$ άγνωστο
(iii) μ, σ^2 άγνωστα

<u>Λύση</u>

$$f(x,\mu,\sigma^2)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\right\}$$

(i) $$L(\vartheta)=f(x_1,\dots,x_n,\mu,\sigma^2)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i,\mu,\sigma^2)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x_i-\vartheta)^2}=$$
$$=\frac{1}{(\sqrt{2\pi\sigma^2})^n}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\vartheta)^2}$$

$$\log L(\vartheta)=-\frac{n}{2\sigma^2}\log(2\pi\sigma^2)-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\vartheta)^2$$

$$\frac{d}{d\vartheta}\log L(\vartheta)=\frac{1}{\sigma^2}\sum(x_i-\vartheta)$$

Εξίσωση πιθανοφάνειας: $\frac{\partial}{\partial\vartheta}\log L(\vartheta)=0 \Rightarrow \frac{1}{\sigma^2}\sum(x_i-\vartheta)\Rightarrow\dots\Rightarrow\vartheta=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$

$$\left.\frac{d^2}{d\vartheta^2}\log L(\vartheta)\right|_{\vartheta=\frac{1}{n}\sum x_i}<0.$$

τοίχο γράφει

Άρα η $L(\vartheta)$ μεγιστοποιείται για $\vartheta=\frac{1}{n}\sum x_i$.
Άρα ΕΜΠ είναι $\hat{\vartheta}=\hat{\mu}=\frac{1}{n}\sum x_i=\bar{x}$
συμπίπτει με ΑΟΕΔ.

(ii) $$L(\vartheta)=f(x_1,\dots,x_n,\mu,\sigma^2)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i,\mu,\sigma^2)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi\vartheta}}e^{-\frac{1}{2\vartheta}(x_i-\mu)^2}=$$
$$=\frac{1}{(2\pi\vartheta)^{n/2}}e^{-\frac{1}{2\vartheta}\sum(x_i-\mu)^2}$$

$$\log L(\vartheta)=-\frac{n}{2}\log 2\pi\vartheta-\frac{1}{2\vartheta}\sum(x_i-\mu)^2$$

$$\frac{d}{d\vartheta}\log L(\vartheta)=-\frac{n}{\vartheta}+\frac{1}{2\vartheta^2}\sum(x_i-\mu)^2$$

Εξίσωση πιθανοφάνειας $\frac{\partial}{\partial\vartheta}\log L(\vartheta)=0\Rightarrow\dots\Rightarrow\vartheta=\frac{1}{n}\sum(x_i-\mu)^2$.

$$\left.\frac{d^2}{d\vartheta^2}L(\vartheta)\right|_{\vartheta=\frac{1}{n}\sum(x_i-\mu)^2}<0.$$ Άρα $\vartheta=\frac{1}{n}\sum(x_i-\mu)^2$ μεγιστοποιεί την $\log L(\vartheta)$

άρα και την $L(\vartheta)$.

Άρα ο ΕΜΠ της ϑ είναι $\hat{\vartheta}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$

συμπίπτει και με τον ΑΟΕΔ.

(iii) $L(\vartheta)=f(x_1,\dots x_n,\mu,\sigma^2)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i,\mu,\sigma^2)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x_i-\mu)^2}=$

$\vartheta=(\mu,\sigma^2)$

$$=\frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum(x_i-\mu)^2}$$

$$\log L(\vartheta)=-\frac{n}{2}\log 2\pi\sigma^2-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$$

Εξισώσεις Πιθανοφάνειας: $\begin{cases}\frac{d}{d\mu}\log L(\vartheta)=0\\ \frac{d}{d\sigma^2}\log L(\vartheta)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)=0\Rightarrow\mu=\bar{x}\\ -\frac{n}{2\sigma^2}+\frac{1}{2\sigma^4}\sum(x_i-\mu)^2=0\Rightarrow\end{cases}$

$$\Rightarrow\sigma^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$$

$\frac{d^2}{d(\mu,\sigma^2)}\log L(\vartheta)$ είναι αρνητικά ορισμένος.

Άρα ΕΜΠ της μ: $\hat{\mu}=\bar{x}\longrightarrow$ συμπίπτει με τον ΑΟΕΔ

ΕΜΠ της σ^2: $\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\longrightarrow$ Δεν συμπίπτει με τον ΑΟΕΔ.

ΑΟΕΔ είναι $\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$

Παράδειγμα 2 (Κατανομή Poisson)

Έστω τα $X_1,\dots,X_n$ από Poisson(ϑ), $p(x,\vartheta)=\frac{e^{-\vartheta}\vartheta^x}{x!}$, $x=0,1,\dots,n$, $\vartheta>0$.

Να βρεθεί ΕΜΠ της ϑ.

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} p(x_i;\theta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{e^{-\theta}\theta^{x_i}}{x_i!} = \frac{e^{-n\theta}\,\theta^{\sum x_i}}{\prod x_i!}$$

$$\log L(\theta) = -n\theta + \sum x_i \log\theta - \log \prod x_i!$$

$$\frac{d}{d\theta}\log L(\theta) = -n + \frac{1}{\theta}\sum x_i$$

Εξίσωση πιθανοφάνειας: $\frac{d}{d\theta}\log L(\theta) = 0 \Rightarrow \dots \Rightarrow \theta = \frac{1}{n}\sum x_i$

$$\left.\frac{d^2}{d\theta^2}\log L(\theta)\right|_{\theta=\frac{1}{n}\sum x_i} < 0$$

Άρα, ο $\hat{\theta} = \frac{1}{n}\sum x_i = \bar{x}$ είναι ΕΜΠ της θ.
Συμπίπτει με τον ΑΟΕΔ.

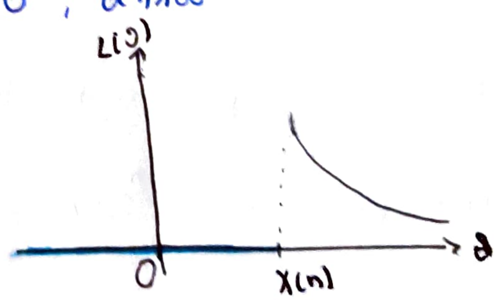
<u>Παράδειγμα 3</u> (Ομοιόμορφη κατανομή)

Έστω τ.δ. $X_1,\dots,X_n$ από $U(0,\theta)$. Να βρεθεί ΕΜΠ της θ.

<u>Λύση</u> Εδώ το πεδίο διακύμανσης εξαρτάται από το θ. Σε αυτές τις περιπτώσεις εξετάζω την μονοτονία της

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\theta} I_{(0,\theta)}(x_i) = \begin{cases} \frac{1}{\theta}, & 0 < x_i < \theta,\ \forall i \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{\theta^n}, & \max_i x_i = X_{(n)} < \theta \\ 0, & \text{αλλού.} \end{cases}$$



$$\frac{d}{d\theta}L(\theta) = -\frac{n\theta^{n-1}}{\theta^{2n}} = -\frac{n}{\theta^{n+1}} < 0 \Rightarrow L \text{ είναι φθίνουσα για } \theta > X_{(n)}$$ (σχήμα)

Άρα η L παίρνει την μέγιστη τιμή της στο $\theta = X_{(n)}$.

Άρα ο ΕΜΠ της θ είναι $\hat{\theta} = X_{(n)}$ και συμπίπτει με τον ΑΟΕΔ.
↳ είναι το επαρκές

Παράδειγμα 4 (ομοιόμορφη κατανομή)

Έστω τ.δ. $X_1,\dots,X_n$ από $U(\theta,\theta+1)$, $\theta>0$. Να βρεθεί ΕΜΠ του θ.

Λύση

$f(x,\theta)=\dfrac{1}{(\theta+1)-\theta}=1,\quad \theta<x<\theta+1$ ← γιατί το πεδίο τιμών της εξαρτάται από το θ

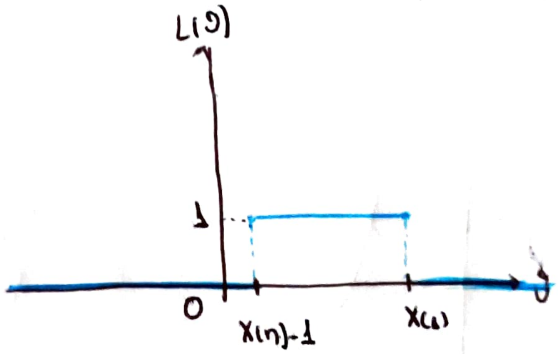
$$L(\theta)=f(x_1,\dots,x_n;\theta)=\prod_{i=1}^{n} f(x_i,\theta)=\prod_{i=1}^{n} 1\, I_{(\theta,\theta+1)}(x_i)=\begin{cases}1, & \theta<x_i<\theta+1,\ \forall i\\ 0, & \text{αλλού}\end{cases}$$

$\theta<x_i<\theta+1,\ \forall\, i=1,2,\dots,n$: $\forall i:\ x_i<\theta+1 \Rightarrow X_{(n)}<\theta+1 \Rightarrow \theta>X_{(n)}-1$

$\forall i:\ \theta<x_i \Rightarrow \theta<X_{(1)}$

$\theta<x_i<\theta+1,\ \forall i \iff X_{(n)}-1<\theta<X_{(1)}$

$$\Rightarrow L(\theta)=\begin{cases}1, & X_{(n)}-1<\theta<X_{(1)}\\ 0, & \text{αλλού}\end{cases}$$



Κάθε σημείο του διαστήματος $(X_{(n)}-1,\ X_{(1)})$ είναι ΕΜΠ του θ, αφού μεγιστοποιεί την $L(\theta)$. Άρα έχει "άπειρους" ΕΜΠ κάθε σημείο του διαστήματος, άρα και κάθε κυρτό συνδυασμό των άκρων, δηλαδή $\hat{\theta}=\lambda(X_{(n)}-1)+(1-\lambda)X_{(1)}$, $\lambda\in(0,1)$

Παράδειγμα 5 (ομοιόμορφη κατανομή).

Έστω τ.δ. $X_1,\dots,X_n$ από $U(\theta_1,\theta_2)$, $\theta_1<\theta_2$. Να βρεθεί ΕΜΠ των θ_1,θ_2.

Λύση

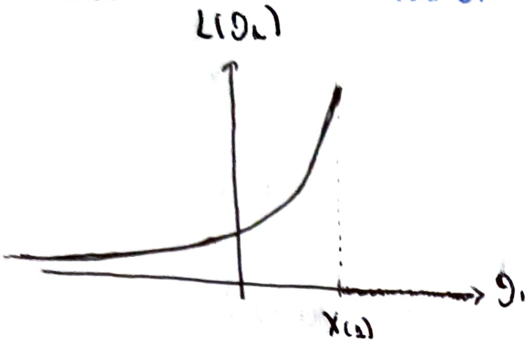
$f(x,\theta_1,\theta_2)=\dfrac{1}{\theta_2-\theta_1},\quad \theta_1<x<\theta_2$

$$L(\theta_1,\theta_2)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{(\theta_2-\theta_1)} I_{(\theta_1,\theta_2)}(x_i)=\begin{cases}\dfrac{1}{(\theta_2-\theta_1)^n}, & \theta_1<x_i<\theta_2\ \forall i\\ 0, & \text{αλλού}\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{1}{(\theta_2-\theta_1)^n}, & \theta_1<X_{(1)},\ \theta_2>X_{(n)}\\ 0 & \text{αλλού}\end{cases}$$

Μελέτη της $L(\theta_1,\theta_2)$ ως προς θ_1 (για θ_2 τυχών σταθερό)

$$\frac{d}{d\theta_1} L(\theta_1,\theta_2) = \frac{n}{(\theta_2-\theta_1)^{n+1}} > 0$$

Άρα η L είναι αύξουσα ως προς θ_1 για $\theta_1 < X_{(1)}$ και 0 για $\theta_1 > X_{(1)}$

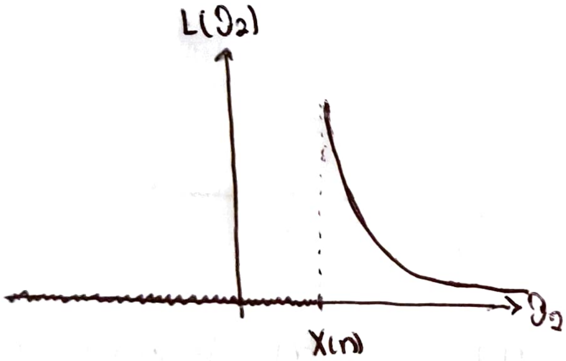


Άρα, η L μεγιστοποιείται για $\theta_1 = X_{(1)}$.
Άρα ΕΜΠ της θ_1 ο $\hat{\theta}_1 = X_{(1)}$

Ανάλογα για το θ_2.

$$\frac{d}{d\theta_2} L(\theta_1,\theta_2) = \frac{-n}{(\theta_2-\theta_1)^{n+1}} < 0.$$

Άρα, η L είναι φθίνουσα ως προς θ_2 για $\theta_2 > X_{(n)}$ και 0 για $\theta_2 < X_{(n)}$.

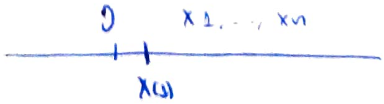


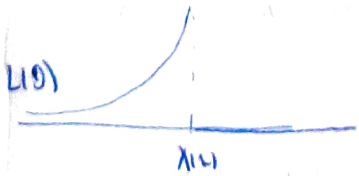
Άρα, η L μεγιστοποιείται ως προς θ_2 για $\theta_2 = X_{(n)}$. Άρα ΕΜΠ της θ_2, ο $\hat{\theta}_2 = X_{(n)}$.

Άσκηση: Έστω τ.δ. $X_1, X_2, \dots, X_n$ από κατανομή Laplace (είναι γενίκευση της κανονικής) με σ.π.π. $f(x,\theta) = e^{-(x-\theta)}$, $x \geq \theta$. Να βρεθεί ΕΜΠ της θ.

(Το πεδίο ορισμού της κατανομής εξαρτάται από το θ. Άρα δε πάω με την μονοτονία)

Απάντηση $\hat{\theta} = X_{(1)}$.





(Να την πάρω αναλυτικά)

Παράδειγμα 6 (Γάμμα κατανομή)

Έστω τ.δ. $X_1, \dots, X_n$ από $G(a,\beta)$, $f(x;a,\beta) = \frac{1}{\beta^a \Gamma(a)} x^{a-1} e^{-x/\beta}$, $x>0$, $a,\beta>0$

Να βρεθεί ΕΜΠ των a, β.

Λύση

$$L(a,\beta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;a,\beta) = \frac{1}{\beta^{na}\Gamma^n(a)} (\Pi x_i)^{a-1} e^{-\Sigma x_i/\beta}$$

$$\log L(a,\beta) = -na\log\beta - n\log\Gamma(a) + (a-1)\Sigma\log x_i - \frac{1}{\beta}\Sigma x_i$$

Εξισώσεις Πιθανοφάνειας: $\begin{cases} \frac{d}{da}\log L(a,\beta) = 0 \\ \frac{d}{d\beta}\log L(a,\beta) = 0 \end{cases} \Rightarrow \dots \Rightarrow \begin{cases} -n\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} - n\log\beta + \sum_{i=1}^{n}\log x_i = 0 & (1) \\ a\beta = \bar{x} & (2) \end{cases}$

Από την (2): $\beta = \frac{\bar{x}}{a}$. Από την (1): $-n\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} - n\log\frac{\bar{x}}{a} + \sum_{i=1}^{n}\log x_i = 0$

Δεν λύνεται σε κλειστή μορφή ως προς a.

Λύνω ως προς a με αριθμητικές μεθόδους και βρίσκω τον ΕΜΠ $\hat{a}$.

Τότε, ο ΕΜΠ του β είναι $\hat{\beta} = \frac{\bar{x}}{\hat{a}}$

- Ασυμπτωτική κανονικότητα του ΕΜΠ $\hat{\theta}$: $\sqrt{n}(\hat{\theta}-\theta) \xrightarrow[n\to\infty]{} N(0,[I_1(\theta)]^{-1})$

Μέθοδος Ροπών

Στηρίζεται στην αναλογία (σχέση) μεταξύ πληθυσμιακών και δειγματικών ροπών

Έστω τ.δ. $X_1, \dots, X_n$ από $f(x;\theta)$, $\theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^r$.

Πληθυσμιακές Ροπές: $\mu_k = E(X^k) = \int x^k f(x,\theta)dx = \mu_k(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r)$, $k = 1, 2, \dots$

Δειγματικές Ροπές: $m_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^k$, $n = 1, 2, \dots$

Ιδιότητες (Μαθηματικά):

(i) m_k αμερόληπτοι εκτιμητές των μ_k (γιατί; → Άσκηση)

[Αρκεί να δείξω ότι $E(m_k)=\mu_k,\ k=1,2,\dots$]

Διαισθητικά: $m_k \simeq \mu_k$

(ii) $m_k \xrightarrow[n\to\infty]{P} \mu_k$, $n=1,2,\dots$ (σχετίζεται κατά πιθανότητα στο μ_k για μεγάλο μέγεθος δείγματος)

Από τα (i) και (ii) έχουμε:

$$\left.\begin{array}{l} \mu_1=\mu_1(\vartheta_1,\dots,\vartheta_r)\simeq m_1=\frac{1}{n}\sum x_i \\ \mu_2=\mu_2(\vartheta_1,\vartheta_2,\dots,\vartheta_r)\simeq m_2=\frac{1}{n}\sum x_i^2 \\ \vdots \\ \mu_r=\mu_r(\vartheta_1,\vartheta_2,\dots,\vartheta_r)\simeq m_r=\frac{1}{n}\sum x_i^r \end{array}\right\}$$

⇒ οι εκτιμητές ροπών των $\vartheta_1,\vartheta_2,\dots,\vartheta_r$ συμβολίζονται με $\tilde{\vartheta}_1,\tilde{\vartheta}_2,\dots,\tilde{\vartheta}_r$ και προκύπτουν από τη λύση του συστήματος:

$$\mu_1(\vartheta_1,\dots,\vartheta_r)=m_1=\frac{1}{n}\sum x_i$$
$$\mu_2(\vartheta_1,\dots,\vartheta_r)=m_2=\frac{1}{n}\sum x_i^2$$
$$\dots$$
$$\mu_r(\vartheta_1,\dots,\vartheta_r)=m_r=\frac{1}{n}\sum x_i^r$$

Παράδειγμα (Κανονική κατανομή)

Έστω $x_1,x_2,\dots,x_n$ από $N(\mu,\sigma^2)$. Να βρεθούν οι εκτιμητές ροπών των μ,σ^2.

Λύση

Έχουμε δύο παραμέτρους, → άρα θέλουμε δύο εξισώσεις

$$\begin{cases} \mu_1=m_1=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \\ \mu_2=m_2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \end{cases} \quad (*)$$

Είναι
$$\left.\begin{array}{l} \mu_1 \overset{\text{ορ}}{=} E(x)=\mu \\ \mu_2 \overset{\text{ορ}}{=} E(x^2)=Var(x)+(Ex)^2=\sigma^2+\mu^2 \end{array}\right\}$$
$\overset{(*)}{\Rightarrow} \mu=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i=\bar{x}$. Άρα ο εκτιμητής ροπών της μ είναι $\tilde{\mu}=\bar{x}$.

(Από την δεύτερη εξίσωση θα έχω:) $\sigma^2+\mu^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \Rightarrow \sigma^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2-\mu^2$.

Άρα, ο εκτιμητής ροπών της σ^2 είναι $\tilde{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2-\tilde{\mu}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2-\bar{x}^2=$

$=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$. Συμπίπτουν με τους ΕΜΠ.

Παράδειγμα (Γάμμα κατανομή)

Έστω τ.δ. $X_1, X_2, \dots, X_n$ από Gamma(a, b). Να βρεθούν οι εκτιμήτριες ροπών των a, b

Λύση

Έχω δύο παραμέτρους → φτιάχνω δύο εξισώσεις

$$\mu_1 = m_1 \Rightarrow E(X) = \frac{1}{n}\sum x_i = \bar{x} \Rightarrow ab = \bar{x}$$

$$\mu_2 = m_2 \Rightarrow E(X^2) = \frac{1}{n}\sum x_i^2 \Rightarrow VarX + (EX)^2 = \frac{1}{n}\sum x_i^2 \Rightarrow ab^2 + a^2b^2 = \frac{1}{n}\sum x_i^2.$$

Επομένως οι εκτιμητές ροπών $\tilde{a}, \tilde{b}$ προκύπτουν από την λύση του συστήματος:

$$\left\{\begin{array}{l} ab = \bar{x} \\ \\ ab^2 + a^2b^2 = \frac{1}{n}\sum x_i^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \tilde{a} = \frac{\bar{x}^2}{\frac{1}{n}\sum(x_i-\bar{x})^2}, \quad \tilde{b} = \frac{\frac{1}{n}\sum(x_i-\bar{x})^2}{\bar{x}}$$